DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

L'espace affine euclidien réel de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, les axes Ox Oy et Oz sont respectivement définis par les vecteurs $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ l'espace est orienté par le choix de ce repère.

Les candidats sont invités à utiliser les conventions de signe qui conduisent pour les formules de Frenet et de Darboux Ribaucour aux expressions suivantes

Trièdre de Frenet de même sens que $\mathcal{R}$: $\vec{\tau}$ tangent à la courbe, $\vec{n}$ normal principale, $\vec{b}$ binormal ; s abscisse rurviligne

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{R} \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\dfrac{\vec{\tau}}{R} + \dfrac{\vec{b}}{T} \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds} = -\dfrac{\vec{n}}{T} \end{array}\right.$$

Le trièdre de Darboux Ribaucour $(\vec{\tau}, \vec{g}, \vec{k})$ de même sens que $\mathcal{R}$; $\vec{g}$ normale géodésique à la courbe, $\vec{k}$ normal à la surface, dont la position relative au trièdre de Frenet est définie par $\theta = (\vec{n}, \vec{k})$ dans le plan $\vec{g}, \vec{n}, \vec{k}$ orienté par $\vec{\tau}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \gamma_g \vec{g} + \gamma_n \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = -\gamma_g \vec{\tau} + \tau_g \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{k}}{ds} = -\gamma_n \vec{\tau} - \tau_g \vec{g}$$

γ_g courbure géodésique, γ_n courbure normale, τ_g torsion géodésique

.../...

I

A tout réel $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ on fait correspondre le point de coordonnées $(\sin 2\varphi, \cos 2\varphi ; 2 \sin \varphi)$ définissant un arc paramétré Γ que l'on oriente dans le sens des φ croissants.

Donner les valeurs numériques de la courbure et de la torsion de Γ au point A image de $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des vecteurs unités du trièdre de Frenet en A ainsi que les coordonnées du centre de courbure Ω de Γ en A .

II

1 °/ A un couple (u, v) de l'ensemble ouvert $\mathcal{D}$ de R^2 défini par $(u, v) \in]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ une fonction fait correspondre le point M tel que

$$\overrightarrow{OM} = (1 + \cos u) \frac{\sin v}{\cos v} \vec{I} + \cos u \, \vec{J} + \frac{\sin u}{\cos v} \vec{K}$$

On désigne par Σ la nappe géométrique ensemble des images des points de $\mathcal{D}$, les points de Σ sont-ils tous réguliers ?

Démontrer que les points de la droite Δ d'équations $x = 0$, $y = -1$ sont, tous, des points d'accumulation de Σ pour la topologie définie par la distance euclidienne.

2 °/ On pose

$$\vec{e_1} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \qquad \vec{e_2} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$$

$$\vec{k} = -\cos v \sin v (1 - \cos u) \vec{I} + [1 - \cos^2 v (1 - \cos u)] \vec{J} + \sin u \cos v \vec{K}$$

vérifier que $\vec{k}$ est un vecteur unité normal à Σ au point (u, v) et que le trièdre $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{k}$ est de même sens que $\mathcal{R}$.

3 °/ Vérifier que l'arc Γ est tracé sur Σ , il est orienté comme au I ; déterminer le trièdre de Darboux Ribaucour qui est attaché à Γ en A , calculer la courbure normale, la torsion géodésique et la courbure géodésique de Γ en A .

III

1 °/ Etablir les expressions des deux formes quadratiques fondamentales de Σ au point M de coordonnées locales (u, v) .

.../...

2°/ Déterminer les tangentes principales à Σ au point M .

Démontrer que la projection orthogonale de l'une d'elles sur le plan xOy passe par un point F_1 indépendant du couple (u, v) ; cette tangente sera qualifiée "première tangente principale en M". Démontrer que la projection orthogonale de l'autre (qui sera dite seconde tangente principale) sur le plan yOz passe par un point F_2 indépendant du couple (u, v).

En déduire que les lignes de courbure des deux familles sont des courbes planes.

3°/ Déterminer les lignes de courbures.

Préciser les valeurs des rayons de courbures principaux en chaque point, ainsi que le lieu des centres de courbures principaux.

Quels sont les points de Σ où la courbure moyenne est nulle ?

4°/ Etablir l'équation différentielle des lignes asymptotiques et l'intégrer.

Déterminer la torsion en M des lignes asymptotiques qui passent par ce point.

IV

1°/ Soit l'arc H tracé sur Σ lorsque v varie seul et que $u = \frac{\pi}{2}$. Déterminer la torsion géodésique, la courbure normale et la courbure géodésique de H en P. Déterminer le cosinus et le sinus de l'angle ω de la première direction principale et de la tangente à H en un point P (H est orienté dans le sens des v croissants).

2°/ Déterminer par son sinus et son cosinus l'angle θ de la normale principale à H en P et de la normale à Σ (le plan normal en P à H est orienté par le sens choisi sur la tangente).

Comparer la torsion géodésique de H et la dérivée de θ par rapport à l'abscisse curviligne de H.

3°/ Dessiner trois figures dans lesquelles on adopte le centimètre pour unité de longueur ; elles représentent respectivement :

a) Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ au point A $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ les directions principales en A, les tangentes à Γ et à H en A, les directions asymptotiques en ce point. Le plan de la feuille est le plan tangent en A à Σ.

b) Les vecteurs unités des trièdres de Frenet et de Darboux Ribaucour situés dans le plan normal en A à Σ, les centres de courbure principaux C_1 et C_2 en A, le centre de courbure de Γ et le centre de courbure C_3 de la section normale tangente à Γ : Le plan de la feuille est le plan normal à Γ en A.

c) Mêmes éléments qu'en (b) en remplaçant Γ par H.

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUE (2 h)

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS 1974

OPTION : M' & P'

Tous les polynômes qui interviennent dans ce problème sont à coefficients réels.

1°/ On désigne par P le polynôme de la variable réelle x :

$$P(x) = 63x^5 - 70x^3 + 15x .$$

Etablir que l'équation $P(x) = 0$ admet 5 solutions réelles comprises entre -1 et $+1$. Déterminer des valeurs approchées de ces racines avec la précision permise par les tables.

On rangera ces solutions suivant l'ordre croissant

$$-1 < x_0 < x_1 < x_2 = 0 < x_3 < x_4 < 1 .$$

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la détermination de ces valeurs conditionne le reste du problème.

2°/ a) Montrer qu'il existe des constantes réelles λ_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ telles que l'égalité

$$(1) \qquad \int_{-1}^{+1} Q(x)\,dx = \sum_{i=0}^{4} \lambda_i\, Q(x_i)$$

soit satisfaite pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 4 .

b) Montrer que $\lambda_0 = \lambda_4$ et $\lambda_1 = \lambda_3$.

c) Déterminer des valeurs approchées de λ_0 , λ_1 et λ_2 .

3°/ Etablir que l'égalité (1) est encore satisfaite pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 9 .

4°/ A toute application g de $[-1, +1]$ dans R admettant des dérivées de tous ordres, on associe

$$J(g) = \int_{-1}^{+1} g(x)\,dx \quad \text{et} \quad I(g) = \sum_{i=0}^{4} \lambda_i\, g(x_i)$$

A l'aide de la formule de Taylor appliquée à la fonction g donner une majoration de la quantité $|J(g) - I(g)|$.

5°/ APPLICATION .

Soit f la fonction définie sur $[-1, +1]$ par $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x}$

a) Evaluer une valeur approchée de $I(f)$.

b) Déterminer une primitive de la fonction f et en déduire une valeur approchée de $J(f)$.

N.B. La cinquième question peut être résolue avant les troisième et quatrième questions.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail